

Ad-soyad :

Numara :

Cevap Anahtarı

Lineer Cebir II Bütünleme Sınavı Soruları

11.07.2023

NOT : Süre 90 dakikadır. Mümkünse cevaplarınızı tek bir PDF dosyası olarak gönderiniz. Başarılar.

1) Aşağıdaki soruların yanlarına doğru ise D yanlış ise Y yazınız (20 p).

(D) 2×3 tipindeki bir matris ile 3×4 tipindeki matrisin çarpımı 2×4 tipinde bir matristir.

(Y) Herhangi iki matrisi toplayabiliriz.

(D) 3 bilinmeyenli 4 lineer denklemden oluşan bir sistemin katsayılar matrisi 4×3 tipindedir.

(D) Her matrise bir lineer dönüşüm karşılık gelir.

(Y) Bir kare matrisin herhangi iki satırı yer değiştirilirse determinant değişmez.

2) $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) Elementer işlemler yardımıyla A matrisinin satırca indirgenmiş eşelon biçimini bulunuz (15 p).

b) A'nın tersi var mıdır, açıklayınız? (5 p)

3) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$ lineer denklem sistemi veriliyor.

a) Denklemin ilaveli katsayılar matrisini yazınız (7 p)

b) Katsayılar matrisinin determinantını bulunuz (7 p).

c) Sistemin çözümünü Cramer yöntemiyle bulunuz (6 p).

4) $\sigma = (1,3)(2,4,5)$ permütasyonu veriliyor.

a) $\sigma^k = \text{Birim permütasyon}$ olacak şekildeki en küçük k sayısını bulunuz (7 p).

b) σ y'ı transpozisyonların çarpımı olarak yazınız (7 p).

c) $\sigma^{-1} = ?$ (6 p)

5) V, F cismi üzerinde vektör uzayı, $A: V \rightarrow V$ lineer dönüşüm olsun. $\beta \in V$ vektörü A'nın bir karakteristik vektörü ise β ya karşılık gelen karakteristik değer tek olduğunu gösteriniz (20 p).

$$2) a) \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_3+R_2} \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 9 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -9R_1+R_2 \\ -4R_1+R_3 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -35 \\ 0 & 4 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{R_2}{11}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -35/11 \\ 0 & 4 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3+R_1 \\ -11R_3+R_2 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 1 & -7/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{7}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}R_3+R_1 \\ \frac{7}{2}R_3+R_2 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

b) $A \approx I_3$ olup A^{-1} vardır.

$$3) a) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array} \right] \quad b) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5-3=2$$

(R_2+R_1 ve $2R_2+R_3$)

$$c) x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 0 \\ 17 & -5 & 5 \end{vmatrix}}{2} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 2 & 17 & 5 \end{vmatrix}}{2} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & 17 \end{vmatrix}}{2} = -1$$

4) a) $\sigma = (\underbrace{1,3}_Z)(\underbrace{2,4,5}_Y) \Rightarrow Z$ ve Y nin uzunluğu 2 ve 3 olup σ nin uzunluğu $oket(2,3)=6$ dir.

$\Rightarrow \sigma^k = E$ olacak şekilde en küçük $k=6$ dir.

b) $\sigma = (1,3)(2,5)(2,4)$

c) $\sigma^{-1} = ((1,3)(2,5)(2,4))^{-1} = (2,4)(2,5)(1,3)$

5) $A(\beta) = \lambda_1 \beta, A(\beta) = \lambda_2 \beta$ olsun.

$$\Rightarrow \lambda_1 \beta - \lambda_2 \beta = A(\beta) - A(\beta) = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \beta = 0$$

β karakteristik vektör olup sıfırdan farklıdır. Son eşitliğin sağlanması için $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ olup $\lambda_1 = \lambda_2$ elde edilir. Sonuç olarak, bir karakteristike vektör tek bir karakteristike değere karşılık gelir.

